Abundance Theorem of Minimal Compact Kähler manifolds with Vanishing Second Chern class.

-Masataka Iwai (Osaka Univ.)-

j.w.w. Shin-ichi Matsumura (Tohoku Univ)

Contents

Quick Riview of Miyaoka's Work

Conj (Abundance Conjecture)

($K_X = \det \Omega_X^1$: canonical divisor, Ω_X^1 : holomorphic cotangent bundle)

X : normal proj var $/\mathbb{C}$ with terminal singularities

$$K_X : \text{nef} \Longrightarrow K_X \text{ semiample } ??$$

line bundle L : nef $\Leftrightarrow$ $\forall C \subset X$ curve, $L.C \geq 0$

L : semiample $\Leftrightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists s_0, \ldots, s_N \in H^0(X, L^{\otimes m})$

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$$
$$x \longmapsto (s_0(x) : \cdots : s_N(x))$$

Well-defined

- nef $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ semiample (In general)
- K_X だとなぜかいえそう?

- Abundance Conjecture は MMP (極小モデル理論) の大きな未解決問題の1つ
- $\dim X = 1, 2, 3$ のとき解決している.

└ "Abundance" と "極小モデルの存在" がいえれば もう分かることはない.
(本来は説明すべきだが 皆さんはご存知でしょう)

もう少し詳しくみてみる

(3次元) Abundance の歴史

Def K_X nef とする．

- $\displaystyle \kappa(K_X) = \limsup_{m\to\infty} \frac{\log \dim H^0(X, K_X^{\otimes m})}{\log m} \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim X\}$

  小平次元 $\left(h^0(X, K_X^{\otimes m}) \sim O(m^\kappa) \right)$

- $\displaystyle \nu(K_X) = \max_{1 \leq k \leq \dim X} \{ K_X^k \not\equiv 0 \} \in \{0, 1, \dots, \dim X\}$

  数値的小平次元 $\left(h^0(X, K_X^{\otimes m} \otimes A) \sim O(m^\nu) \right)$ A = ample.

  （X smooth なら $K_X^k := c_1(K_X)^k \in H^{2k}(X, \mathbb{R})$ と定義する
  singular のときもうまく定義する）

Rem つねに $\kappa \leq \nu$

Thm (Kawamata 85 Invent. Math.)

K_X nef & $\kappa(K_X) = \nu(K_X) \Rightarrow K_X$ semi ample

よって K_X nef $\Rightarrow \kappa(K_X) = \nu(K_X)$ を示せばよい!!

Known Result（$n = \dim X \geq 2$ において）

- [Kawamata 85 (crelle)]
  $$\nu(K_X) = 0 \Rightarrow \kappa(K_X) = 0.$$
  (・他にも klt, lc, slc で多くの人がやってる.
  cf. Nakayama 04, Druel 11, Gongyo 13, Kawamata 12, Campana-Koziarz-Păun 12, Shibata 17.)
  klt　slc　lc pair　smooth lc　lc.
- $$\nu(K_X) = n \Rightarrow \kappa(K_X) = n$$
  (・Asymptotic Riemann-Roch (Proj)
  ・Demailly's Holomorphic Morse (Kähler))

⇝ 3次元 Abundance は $\nu(K_X)=1$, $\nu(K_X)=2$ が問題であった.

Thm X = 3dim proj var/$\mathbb{C}$, terminal sing とする

- [Miyaoka 88. Math Ann.]　K_X nef $\Rightarrow \kappa(K_X) \geq 0$
- [Miyaoka 88. Compo.]　K_X nef & $\nu(K_X) = 1 \Rightarrow \kappa(K_X) = 1$.
- [Kawamata 92]　K_X nef & $\nu(K_X) = 2 \Rightarrow \kappa(K_X) = 2$.

・[Kollár et al 92] に まとめられている.
(3dim lc Keel-Matsuki-McKernan
3dim slc Fujino)

Miyaoka & Kawamata で 3dim Abundance は解決

⇝ 今回は 3dim Nonvanishing をくわしくみる.

以下 X smooth とする.

Thm (Miyaoka 87) "pseudo-effectiveness of c_2"

K_X nef $\Rightarrow$ $c_2(\Omega_X^1)H^{n-2} \geq 0$ ($\forall H$: ample line bundle.)

Proof of Nonvanishing.

$$1 - h^1(X, \mathcal{O}_X) - h^3(X, \mathcal{O}_X) \leq \chi(\mathcal{O}_X) \overset{\text{HRR.}}{=} -\frac{1}{24} c_1(K_X) c_2(\Omega_X^1) \overset{\text{Miyaoka87.}}{\leq} 0$$

$\Rightarrow$ ① $h^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ or. ② $h^3(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$

① $\Rightarrow$ $\exists \mathrm{Alb}: X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ ・Stein factorization をとる

$\Rightarrow$ $\exists f: X \longrightarrow Z$ ・Iitaka conj for 3fold)

s.t. $\underset{(\dim F \leq 2)}{\kappa(K_X) \geq \kappa(K_F)} + \kappa(K_Z) \Rightarrow \kappa(K_X) \geq 0$.

$\kappa(K_F) \geq 0$, $\kappa(K_Z) \geq 0$

(Av の sub の finite cover は $\kappa \geq 0$: [Ueno77])

② $\Rightarrow$ $h^0(X, K_X) = h^3(X, \mathcal{O}_X) \neq 0 \Rightarrow \kappa(K_X) \geq 0$ □

Rem

- X が terminal だと少し難しい（Lazić-Peternell [18] にわかりやすい証明がある）
- $\nu=1$ の Abundance の証明は変形理論を使うらしい
  （知っている人がいれば教えて下さい。(Miyaoka 先生オリジナルのアイデアらしい (Lazić 先生からいわれた))
- $\nu=2$ の証明は MMP 的（っぽい）
  （この方法で $\nu=1$ も証明できる。[Kollár et al 92] でもこっちが採用されていたはず。）

Question $c_2(\Omega_X^1)H^{n-2}=0$ のとき X の構造はどうなる？

一種の uniformization theorem

cf. [Chen-Ogiso]

X has KE & $\left(c_2(\Omega_X^1)-\frac{n}{2(n+1)}c_1(\Omega_X^1)^2\right)H^{n-2}=0$

$\Rightarrow$ $X_{univ}\simeq \mathbb{P}^n$, $\mathbb{C}^n$ or $\mathbb{B}^n$ (unit ball)

（これは klt variety で成り立つ [GKPT19,20], [GKP16 Duke] [GKP22]）
(Greb-Kebekus-Peternell-Taji)

Main Result.

Thm (I. - Matsumura '22)

$\cdot X$: compact Kähler manifold of $n = \dim X \geq 2$

If K_X is nef & $c_2(\Omega_X^1) = 0$, then K_X is semiample.

Moreover, $\exists X' \longrightarrow X$ finite étale.

s.t. ① X' is a torus

or ② $\exists f' : X' \longrightarrow C'$ smooth fibration

s.t. C' is curve of $g \geq 2$, ${}^{\forall}$fiber is torus

要するに $c_2 = 0$ の Abundance Conjecture (Smooth版)は解決

Rem $c_2(\Omega_X^1) H^{n-2} = 0 \Longrightarrow c_2(\Omega_X^1) = 0$ in $H^{2,2}(X, \mathbb{R})$

(微妙に異なるが示せる. ([IM22]))

Proof

証明はめちゃくちゃテクニカル（気づけばかんたん）

使う道具

- Nakayama's projectively numerically flatness
  (Hermitian flat ⇒ numerically flat ⇒ flat
  proj化
  Projectively herm flat ⇒ $\boxed{\text{proj num flat}}$ ⇒ proj flat)
  semistable + $(2rc_2(\mathcal{E}) - (r-1)c_1(\mathcal{E})^2) = 0$
- Miyaoka–Ou–Cao's classification. ($\mathcal{E}$ generically nef, $c_1(\mathcal{E})$ nef, $c_2(\mathcal{E}) = 0$ なる reflexive sheaf の構造定理)
- Kollár's Shafarevich map ($\rho : \pi_1(X) \to G \rightsquigarrow \exists\, Sha^{\rho} : X \dashrightarrow Sha^{\rho}(X)$)
- Campana's speciality (Variety = special + log general type)
- Pereira–Rousseau–Touzet による special の判定法 (using Touzet's transversally hyperbolic foliation)
- Höring's Structure Theorem (Ω_X^1 nef & K_X semiample の構造定理)
  (これは使うだけ。)

（“他に良い証明ないですかね??”）

以下 飽きるまで 示します (残り10分になったらやめます)

Thm (Miyaoka–Ou–Cao's classification)

[Miyaoka 87] proj $\nu \geq 2$ のときはすぐいえる (かいてないが)
[Ou 17] proj Cao のアイデアを詳しく書いた
[Cao 13] Kähler. $\nu = 1$ のアイデア
[IM 22] 上をまとめて "nef" を示した

X : cpt Kähler. K_X : nef.
If $c_2(\Omega_X^1) = 0$, then the followings hold:

(1) $\nu(K_X) \geq 2$ case.
$\exists A \subset \Omega_X^1$ line bundle, s.t. $c_1(A) = c_1(K_X)$

(2) $\nu(K_X) = 1$ case. (Nakayama のていりを つかう)
$\exists \mathcal{E} \subset \Omega_X^1$ projectively flat s.t. $c_1(\mathcal{E}) = \lambda c_1(K_X)$ $\exists \lambda > 0$

(3) $\nu(K_X) = 0$ case, Ω_X^1 semistable w.r.t ω (kähler form)

In all cases, Ω_X^1 is nef ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_X^1)}(1)$ is nef on $\mathbb{P}(\Omega_X^1)$.)

(本当は一般の reflexive sheaf $\mathcal{E}$ でいえる (generically nef は必要だが))

Cor (1) $\nu(K_X)\geq 2$ はおこりえない

Pf (1)がおこる $\Rightarrow$ $\exists A\subset\Omega_X^1$ $\nu(A)=\nu(K_X)\geq 2$
$\Rightarrow$ $H^0(X, \Omega_X^1\otimes A^{-1})\neq 0$ $\nu(A)>1$ $\Rightarrow$ 矛盾 (Bogomolov-Sommese vanishing)

よって $c_2(X)=0$ & K_X nef $\Rightarrow$ $\nu(K_X)\leq 1$ & Ω_X^1 nef.
"$\nu(K_X)=0$ のアバンダンスはokより $\nu(K_X)=1$ のときをみる"

"Ω_X^1 nef" のよいところ
$\forall F\subset X$ subvariety にかして Ω_F^1 nef.

帰納法が つかいやすい

(とくに $\exists f: X\to Y$ fibration があればよい)

Campana's Core fibration

Def [Campana 04] (Special Variety)

X : compact Kähler mfd.
X is special $\Longleftrightarrow$ $1 \le {}^\forall p \le n$, ${}^\forall L \subset \Omega_X^p$ linebundle, $\kappa(L) < p$

(cf. [Bogomolov '78] $L \subset \Omega_X^p \Rightarrow \kappa(L) \le p$)

–Philosophy–
Variety は "special" と "log general type" に分かれる

Thm [Campana 04] (Core fibration)

X is not special
$\Longrightarrow {}^\exists f : X \dashrightarrow Y$ almost holo dominant rational map
(本当は "up to bimero" がいる 最後のみ 今回は 不要)
s.t. • general fiber of f is special
• Y is log general type.

In particular. $\kappa(K_X) \ge \kappa(K_F) + \dim Y$.

$$\boxed{\textbf{Thm [IM22]}\quad \Omega_X^1 \text{ nef } \& \ \nu(K_X)=1 \Rightarrow X \text{ is non special,}}$$

Prop $\nu(K_X)=1$ & Ω_X^1 nef $\Rightarrow$ $\kappa(K_X)=1$

(pf) Induction Argument.

$\exists\ f: X \dashrightarrow Y$ core fibration (Induction argument)

F = general fiber.

Ω_F^1 nef & $\nu(K_F) \leq 1 \underset{\sim}{\overset{//}{\Rightarrow}} \kappa(K_F)=\nu(K_F) \geq 0$

$\Rightarrow \kappa(K_X) \geq \kappa(K_F) + \dim Y \geq \dim Y \underset{\sim}{\geq} 1$

(Nonspecial $\not\cong$ pt)

$\Rightarrow 1 \geq \nu(K_X) \geq \kappa(K_X) \geq 1 \Rightarrow \kappa = \nu = 1$ $\square$

Criterion of Non-speciality

Thm [Pereira–Rousseau–Touzet22]

X : cpt Kähler mfd

If $\exists L \subset \Omega_X^1$ line bundle with $\nu(L)=1$, then X is Non special

Rem $\exists L \subset \Omega_X^1$ $\nu(L)=1$ & $\kappa(L)=-\infty$ の例がある

(Hibert Modular Surfae $\mathbb{D}^2/\Gamma$ の tautological foliation の normal bundle)

(Projection ～ つくれるから) Foliation のアバンダンスが成立しない例)

この証明はむずかしい (完ぺきに理解してない) ゴリゴリの foliation の定理

(Touzet's transversally hyperbolic foliation)

Thm [IM22]

$\exists \mathcal{E} \subset \Omega_X^1$ projectively flat with $\nu(c_1(\mathcal{E}))=1 \Rightarrow X$ is nonspecial

これは $\exists \rho : \pi_1(X) \to PGL(r, \mathbb{C})$ で $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \simeq X_{univ} \times_\rho \mathbb{P}^r$ なるもので

ρ の表現が "有限" か "可解" か それ以外で場合わけする ← (最近はやりの方法 Shafarevich map をつかう)

Out look

- Singularity があるとき.

(とりあえずできたので松村さんに送った.. たぶん大丈夫)

おそらく X = klt variety smooth in codim 2 ならできた(はず)

<u>Question smooth in codim 2 は はずせない?</u>

$\boxed{\text{やばい点}}$ smooth in codim 2 を外すと $c_2(\Omega_X^1)$ が定まらない!!

$\xrightarrow{\text{ところが}}$ orbifold Chern は定まる.

<u>Thm</u> [GKKP11] [GKPT19]

- X KLT variety $\Longrightarrow$ $\exists Z$: $\operatorname{codim} Z \geq 3$, $X \setminus Z$ has quotient sing.
- $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ reflexive on X $\Longrightarrow$ orbifold Chern $\hat{c}_2(\mathcal{E}), \hat{c}_1(\mathcal{E})\hat{c}_1(\mathcal{F})$ が定まる.

(ラフに考えると
X KLT $\Longrightarrow$ $X \setminus Z$ has quotient sing
$\Longrightarrow$ $X \setminus Z$ has orbifold str
$\Longrightarrow$ Chern が定まる)

($\hat{c}_2(\mathcal{E})L_1 \cdots L_{n-2}$, $\hat{c}_1(\mathcal{E})\hat{c}_1(\mathcal{F})L_1 \cdots L_{n-2}$
がうまく定まる (L_i: Cartier div))

Conj X KLT variety

$$\boxed{K_X \text{ is nef } \& \ \hat{c}_2(\Omega_X^{[1]})H^{n-2}=0 \Rightarrow K_X \text{ is semiample ??}}$$

実はこの予想はDonaldson-Uhlenbeck-Yauと関連がある.

DUY ($\mathcal{E}$ H-stable $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ has Hermite Einstein)

(小林-ヒッチンだと海外の人に通じなかった)

why? 論理展開としては...

DUY $\Rightarrow$ Nakayama's Proj num flat $\Rightarrow$ $\hat{c}_2$ のAbundance

なんと smooth in codim 2 では DUY ができている.

Thm [Chen-Wentworth 21] (cf. [Ou22] [Cao-Graf-Naumann-Păun-Peternell-Wu] (Bayreuth Univ) to appear in arXiv?)

・X : normal proj var. smooth in codim 2.

このとき DUY が成りたつ ($\mathcal{E}$ reflexive $\mathcal{E}$: H-stable $\Leftrightarrow$ $\exists$admissible HE metric on $\mathcal{E}$)

さらに reflexive sheaf $\mathcal{E}$ が H^{n-1} stable

$$\Rightarrow \left(c_2(\mathcal{E}) - \frac{r-1}{2r}c_1(\mathcal{E})\right)H^{n-2} \geq 0$$

"=" 成立 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ Projectively flat over X_{reg}.

Conj. X: KLT variety, $\mathcal{E}$: reflexive sheaf

$\mathcal{E}$: H^{n-1}-stable $\Rightarrow$ $\left(\hat{c}_2(\mathcal{E}) - \frac{r-1}{2r}\hat{c}_1(\mathcal{E})^2\right) H^{n-2} \geq 0$?

"=" holds $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ projectively flat over X_{reg} ?

つまり Orbifold版のDUってどこまでできてます？

Rem • KE なら M. Faulk がやっている。(cf. Chi-Li 19 Math Ann)

(c₁(K_X)=0, c₁(K_X)>0 caseをやった)

• Fanoのとき L. Braun がなんかやってた

(最近 KLT weak Fano X の $\pi_1(X_{reg})$ の有限性示した人

その証明でも orbifold をつかっている。(weak Fano の単連結性 (Takayama '00) の orbifold版))

終